

# Modèle direct pour la tomographie 3D : apport d’une approximation par B-splines séparables

Fabien MOMEY<sup>1,2</sup>, Jean-Marie BECKER<sup>1</sup>, Loïc DENIS<sup>2</sup>, Catherine MENNESSIER<sup>1</sup>, Éric THIÉBAUT<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire Hubert Curien ;  
Bâtiment F 18 Rue du Professeur Benoît Lauras, 42000 Saint-Étienne, France

<sup>2</sup>Centre de Recherche Astrophysique de Lyon  
9 avenue Charles André, 69561 Saint Genis Laval cedex, France  
fabien.momey@univ-lyon1.fr

**Résumé** – En tomographie, les méthodes de reconstruction itératives nécessitent une modélisation discrète du processus d’obtention des mesures. La représentation de l’objet d’intérêt est le point de départ à l’élaboration d’un modèle de projection tomographique sur le détecteur, précis et rapide. Les modèles conventionnels *ray driven* [4] et *distance driven* [1], construits à partir d’indicatrices de voxels, ont l’inconvénient d’être fortement anisotropes. Nous proposons un modèle utilisant des fonctions de bases B-splines de degré adéquat, nous fournissant un projecteur quasiment isotrope. Une approximation de la projection par une B-spline séparable sur le détecteur conduit à un modèle efficace en géométrie parallèle et conique, de qualité supérieure aux modèles conventionnels. Nous montrons notamment que l’erreur de modélisation est améliorée d’un facteur 10 par rapport au modèle *distance driven*. Nous illustrons l’amélioration de la qualité de reconstruction apportée par notre modèle sur des simulations du fantôme de Shepp-Logan, en utilisant une méthode itérative de reconstruction régularisée.

**Abstract** – Iterative reconstruction methods for tomography require discrete data modelization. The representation of the object of interest is the starting point of the projector. The standard models *ray driven* [4] and *distance driven* [1], relying on cubic voxel basis functions, suffer from high modelization errors due to anisotropic behaviour. We propose the use of B-spline basis functions of sufficiently high degree, yielding an almost isotropic projector. An approximation of the projection by a separable B-spline on the detector enforces the efficiency of the model in parallel and cone beam geometries, with higher quality than the standard models. We demonstrate that the modelization error is divided by 10 with respect to the *distance driven* model. We show the quality improvement of reconstruction of our model on simulations of the Shepp-Logan phantom, using regularized iterative reconstruction methods.

## 1 Méthode

### 1.1 Des B-splines comme base générale de représentation

Les méthodes de reconstruction itératives pour la tomographie nécessitent une modélisation numérique du processus d’obtention des mesures. C’est le *modèle direct* qui définit le passage de l’espace des paramètres de l’objet d’intérêt discrétisé à l’espace des mesures (projections communément appelées sinogrammes en tomographie, discrétisées également). Le calcul de ces *projections* est basé sur le principe de la transformée de Radon [5], qui constitue l’ensemble des intégrales de la fonction continue le long des droites intersectant son support. La représentation de l’objet d’intérêt est le point de départ à l’élaboration de ce *projecteur*. Cet objet est assimilé à une fonction continue  $f(\mathbf{x})$ , décomposée sur une base discrète de fonctions. Une simple fonction  $b(\mathbf{x})$  compose cette base, et celle-ci est dupliquée sur une grille régulière, en chaque point de laquelle elle est affectée d’un coefficient multiplicatif  $c_{\mathbf{k}}$  :

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} c_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} c_{\mathbf{k}} b(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\mathbf{k}}) \quad (1)$$

Où  $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$  correspond aux indices des points de la grille discrète dans l’espace de dimension  $n$ ,  $\mathbf{x}_{\mathbf{k}} = (x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_n}) \in \mathbb{R}^n$  sont les coordonnées de cette grille discrète et  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  sont les coordonnées des points continus de  $f$  dans ce même espace.

Le choix de la base de fonctions est primordial pour modéliser au mieux la continuité de la fonction  $f$ , et ainsi assurer la cohérence du projecteur avec le système de mesures réel. Les fonctions classiquement utilisées sont les indicatrices de voxels. Ce sont simplement des fonctions *portes* tridimensionnelles (i.e. fonctions caractéristiques d’intervalles unitaires), donc uniformes sur un support cubique de la taille du pas d’échantillonnage de la grille. Elles sont utilisées pour des modèles standard de projection tels que *ray driven* [4] et *distance driven* [1] (cf. 1.2.2).

Les propriétés souhaitées pour une base de fonctions efficace sont :

1. Bonne modélisation de la continuité de la fonction, tout en

- préservant les bords francs éventuels ;
2. support compact pour une influence locale ;
  3. séparabilité (ré-interpolation séparable) ;
  4. robustesse de la base de fonctions aux artefacts générés par des transformations géométriques (rotation, ré-échantillonnage, recalage, etc.) ;
  5. symétrie sphérique pour avoir un profil de projection indépendant de l'orientation du détecteur : fonctions de type *blobs* (éléments à symétrie sphérique) [6].

Remplissant l'ensemble de ces conditions (asymptotiquement seulement pour la propriété 5), les B-splines multidimensionnelles séparables, notées  $\beta(x)$ , fonctions polynomiales par morceaux, s'avèrent être d'excellentes candidates.

Bien connues en traitement du signal, les B-splines modélisent de manière efficace la continuité d'une fonction, notamment par leur parfaite reproduction de la constante, ainsi que par leur bonne conservation des bords francs. Une B-spline est définie par le degré  $d$  des fonctions polynomiales qui la composent. Pour un degré suffisamment élevé, elles constituent d'excellentes fonctions d'interpolation. Cette propriété est très intéressante lorsqu'une ré-interpolation est nécessaire suite à une transformation géométrique. Notre base de fonctions devient donc :

$$b_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \beta_{\mathbf{k}}^h(\mathbf{x}) = \beta^h(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\mathbf{k}}) = \prod_{q=1}^n \beta^h(x_q - x_{k_q}) \quad (2)$$

L'indice  $h$  correspond au pas d'échantillonnage. Une B-spline est normalisée à 1. Pour un pas d'échantillonnage  $h$  non unitaire, on conserve cette intégration à l'unité :  $\beta^h(x) = \frac{1}{h} \cdot \beta(\frac{x}{h})$ . L'expression d'une B-spline normalisée (pas d'échantillonnage  $h = 1$ ) de degré 3 est (cf. Fig. 1) :

$$\beta(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} - \frac{1}{2}|x|^2(2 - |x|) & 0 \leq |x| \leq 1 \\ \frac{1}{6}(2 - |x|)^3 & 1 \leq |x| \leq 2 \end{cases} \quad (3)$$

L'indicatrice de voxel est quant à elle une B-spline de degré 0. Notre approche va généraliser l'utilisation de B-splines à des degrés supérieurs.

La B-spline standard de degré  $d$  n'est pas à symétrie sphérique. Cependant elle tend à l'être si  $d$  est suffisamment grand. La raison est qu'elle peut s'écrire comme produit de convolution de  $d + 1$  fonctions *portes* ayant pour largeur de support le pas d'échantillonnage. Lorsque  $d$  tend vers l'infini, à une renormalisation près, la B-spline tend donc vers la gaussienne, à symétrie sphérique, du fait du théorème central limite.

## 1.2 Modèle de projection

### 1.2.1 Transformée de Radon

Comme énoncé dans 1.1, le modèle mathématique d'acquisition des mesures en tomographie est la transformée de Radon. Dans le cas de la tomographie par rayons X, elle traduit l'absorption des rayons X par l'objet qu'ils traversent (loi de Beer-Lambert). La métrique mesurée est ainsi l'intégrale du coefficient d'absorption le long de la trajectoire du faisceau X. La

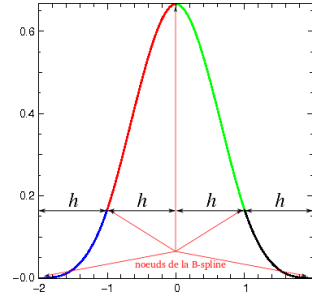


FIGURE 1 – B-spline cubique (degré  $d = 3$ ) monodimensionnelle. La fonction est composée de  $d + 1 = 4$  morceaux de fonctions polynomiales de degré  $d$  occupant chacun un pas d'échantillonnage  $h$  sur la grille, avec un raccordement  $C^{d-1}$ . Le support de la fonction est donc de  $(d + 1)h$ , et "empiète" donc sur celui des fonctions adjacentes. Ainsi la valeur  $f_{\mathbf{k}}$  de la fonction  $f(\mathbf{x}_{\mathbf{k}})$  en un point de la grille d'échantillonnage  $\mathbf{x}_{\mathbf{k}}$  n'est pas égale au coefficient  $c_{\mathbf{k}}$  affecté à la fonction de base  $\beta_{\mathbf{k}}^h(\mathbf{x}_{\mathbf{k}})$  en ce point.

transformée de Radon de la fonction  $f$  pour une orientation  $\theta$  du détecteur s'écrit :

$$P_{\theta}(\mathbf{u}) = \int_{\mathbf{x} \in \{S, \mathbf{r}\}} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} c_{\mathbf{k}} F_{\theta}^{\mathbf{k}}(\mathbf{u})$$

$$\text{avec } F_{\theta}^{\mathbf{k}}(\mathbf{u}) = \int_{\mathbf{x} \in \{S, \mathbf{r}\}} \beta_{\mathbf{k}}^h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (4)$$

Où  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$  est la position sur le détecteur et  $\{S, \mathbf{r}\}$  désigne la droite partant de la source  $S$  et de vecteur directeur  $\mathbf{r}$ .  $F_{\theta}^{\mathbf{k}}(\mathbf{u})$  est alors nommée l'*empreinte* de la fonction de base  $\beta_{\mathbf{k}}^h(\mathbf{x})$  sur le détecteur. Cette empreinte constitue la projection du voxel, qui sera intégrée sur le support de chaque pixel détecteur impacté dans l'opérateur de projection final. Nous pouvons noter que notre modèle est général et s'adapte aussi bien à la projection parallèle que conique.

### 1.2.2 Modèles conventionnels

On présente ici 3 modèles standards largement utilisés en tomographie, tous trois basés sur une représentation de l'objet par des indicatrices de voxels.

- Le modèle *voxel driven* constitue le modèle le plus utilisé. On projette le centre du voxel sur le détecteur et on interpole linéairement sa valeur sur les centres des pixels du détecteur ;
- Le modèle *ray driven* [4] se base sur une approche type *lancer de rayons*. On « tire » un rayon depuis chaque pixel détecteur d'après l'incidence donnée par la géométrie de projection. La mesure de la projection pour ce pixel est obtenue par sommation des valeurs de l'objet interpolées le long de ce rayon. Cette approche est génératrice de *trous* dans les reconstructions puisque certains voxels peuvent ne jamais être *vus* par le détecteur, suivant le dimensionnement et l'orientation du système de mesures ;
- Le modèle *distance driven* [1] projette une section du voxel et approxime l'empreinte trapézoïdale par le parallélogramme (empreinte uniforme sur un rectangle) couvrant au mieux la surface

d'impact. Ce modèle est une évolution de *ray driven* puisque les artefacts de *trous* n'existent plus avec cette approche (tous les voxels sont *vus* par le détecteur).

### 1.2.3 Approximations par B-splines séparables

L'expression analytique de l'empreinte  $F_{\theta}^k(\mathbf{u})$  (4), c'est-à-dire la transformée de Radon d'une fonction B-spline de base, peut être déterminée en géométrie parallèle [3], mais semble difficile à mettre en œuvre numériquement. De plus, en géométrie conique, elle devient bien plus complexe à déterminer analytiquement. Nous proposons de simplifier le calcul avec les approximations suivantes :

1. L'empreinte d'une B-spline de degré  $d$  à  $m$  dimensions est approximée par une B-spline à  $m - 1$  dimensions, de degré identique, séparable suivant les axes du détecteur ;

2. la projection conique d'une B-spline est approximée de façon similaire mais dilatée d'un facteur de grandissement isotrope dû à la divergence du faisceau.

La première approximation se justifie par la propriété de la B-spline à tendre vers la gaussienne lorsque son degré augmente. En effet la gaussienne est à symétrie sphérique et séparable quelle que soit l'orientation de ses axes. Ainsi il est trivial de déduire que l'empreinte d'une gaussienne à  $m$  dimensions est une gaussienne à  $m - 1$  dimensions. Une B-spline cubique (de degré 3) diffère déjà très peu de la gaussienne [8].

La seconde approximation se justifie par le fait que l'angle d'ouverture du support de la B-spline par rapport à la source est très petit. Le grandissement variable  $\gamma_k(\mathbf{u})$  (variation en fonction de la divergence du faisceau) que subit le support de la B-spline, dépendant de sa position, peut alors être supposé invariant pour un voxel donné. À cela est associé une dilatation  $\delta_c^{\mathbf{u}} = (\delta_c^{u_1} \delta_c^{u_2} \dots \delta_c^{u_{n-1}})$  due à l'angle d'incidence du faisceau sur le détecteur, supposée invariante également pour un voxel donné :

$$F_{\theta}^k(\mathbf{u}) = \prod_{q=1}^{n-1} \beta^h \left( \frac{u_q}{\delta_c^{u_q} \cdot \gamma_k} - u'_q \right) \quad (5)$$

Où  $\mathbf{u}' = (u'_1, u'_2, \dots, u'_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$  est la projection du centre de la B-spline  $\beta_k^h(\mathbf{x})$  sur le détecteur.

La figure 2 quantifie l'erreur d'approximation du projecteur. L'empreinte exacte sur le détecteur d'une B-spline séparable à 3 dimensions, convoluée par la réponse du pixel (fonction *porte* à 2 dimensions) est calculée numériquement, puis comparée au calcul de l'empreinte approximée. On visualise l'erreur relative (c'est-à-dire la différence en valeur absolue entre la vraie empreinte et son approximation, divisée par la valeur maximale de la vraie empreinte) pour des B-splines de degrés différents : une indicatrice de voxel (degré 0) et une B-spline cubique.

– Dans le cas de l'indicatrice de voxel, on s'intéresse, pour une géométrie de projection conique, à la position du voxel et l'orientation du détecteur générant la pire erreur pour notre approximation : le voxel est très éloigné du centre du champ de vue et le détecteur est incliné de  $45^\circ$  par rapport au plan horizontal.

On compare, dans cette même configuration géométrique du système, l'erreur d'approximation du modèle *distance driven* (image de gauche) avec celle de notre modèle (image de droite). L'erreur maximale mesurée pour le modèle *distance driven* est de 30.5%, contre 17.7% pour notre projecteur. Notre approximation est donc deux fois plus précise, même pour une modélisation de l'objet d'intérêt aussi anisotrope que des indicatrices de voxels. Il a d'ailleurs déjà été montré dans [2] qu'une approximation plus fine de la projection d'une indicatrice de voxels réduisait l'erreur de modélisation et améliorait la qualité de reconstruction, et ce sans surcoût de calcul.

– Dans le cas de la B-spline cubique, on s'intéresse au même type d'erreur, également dans le pire cas, mais en considérant deux géométries de projection différentes : parallèle et conique. En projection parallèle (image de gauche), l'empreinte est indépendante de la position du voxel pour une orientation donnée du détecteur. Le cas le plus défavorable intervient logiquement lorsque le détecteur est incliné de  $45^\circ$  par rapport au plan horizontal (le projecteur est exact lorsque le détecteur oriente la projection suivant l'un des axes principaux de la B-spline). On mesure dans ce cas une erreur de 1.21%. En projection conique (image de droite), le cas le plus défavorable se produit lorsque le voxel est excentré, et lorsque les axes du détecteur sont alignés avec 2 axes de séparabilité de la B-spline. L'erreur mesurée est alors de 2.24%. On a donc gagné un facteur 10 environ en précision par rapport à une modélisation par indicatrices de voxel.

## 2 Résultats sur des reconstructions à 2 dimensions et futurs travaux

La figure 3 montre des résultats de reconstructions itératives d'un fantôme de Shepp-Logan  $128 \times 128$  (image (a)), à partir de sinogrammes non bruités calculés analytiquement en géométrie parallèle, pour 200 pixels sur le détecteur et 60 angles de projection espacés régulièrement sur un intervalle de  $180^\circ$ . L'échantillonnage des pixels sur le détecteur est identique à l'échantillonnage de la grille de pixels de l'objet d'intérêt. L'algorithme de reconstruction utilisé est une méthode d'optimisation Quasi-Newton (BFGS à mémoire limitée), minimisant un critère d'attache aux données quadratique avec une régularisation de type variation totale lissée [7]. On compare les reconstructions utilisant notre modèle et le modèle *distance driven*.

L'image (b) représente le meilleur résultat qualitatif avec notre projecteur utilisant des B-splines cubiques. Le poids de la régularisation est réglé pour obtenir une bonne qualité de l'image, avec notamment une bonne reconstruction des petits objets faiblement contrastés. L'image (c) représente le meilleur résultat qualitatif avec le projecteur *distance driven*. On constate déjà une qualité d'image inférieure à l'image (b). L'image (d) représente une reconstruction avec le projecteur *distance driven*, où l'erreur résiduelle par rapport aux mesures initiales est identique à l'image (b). On en conclut qu'à niveau

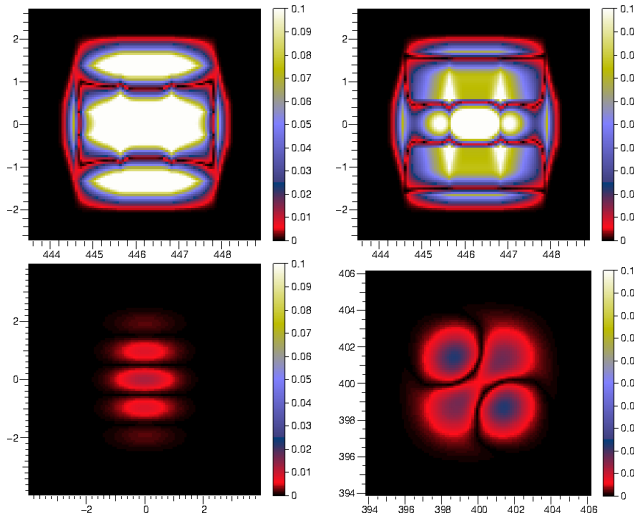


FIGURE 2 – Quantification de l’erreur d’approximation (dans les cas les plus défavorables) des projections de B-splines tridimensionnelles de différents degrés suivant notre approximation et celle d’un modèle standard type *distance driven*. On visualise l’erreur relative (valeur absolue de la différence entre la vraie empreinte et son approximation, divisée par la valeur maximale de la vraie empreinte). En haut : projection conique d’une B-spline de degré 0 (indicateur de voxel) suivant le modèle *distance driven* (à gauche), et l’approximation B-splines séparables (à droite). Erreurs maximales : 30.5% à gauche et 17.7% à droite. En bas : projection parallèle (à gauche) et conique (à droite) d’une B-spline cubique suivant l’approximation B-splines séparables. Erreurs maximales : 1.21% à gauche et 2.24% à droite.

égal d’accord aux données, notre modèle engendre une bien meilleure reconstruction que le modèle *distance driven*. Les images (e) et (f) représentent des profils pris sur les images reconstruites (cf. légende de la figure 3). Ces profils renforcent encore la démonstration du gain de notre modèle sur la précision de reconstruction, puisque la récupération des détails est bien supérieure à celle du modèle *distance driven*.

Les objectifs futurs sont la quantification des gains et apports de notre modèle sur les reconstructions à nombre limité d’angles de projection, à partir de mesures bruitées et pour différentes géométries de projection. Le passage à la reconstruction à 3 dimensions en géométrie conique est également en cours.

## Références

- [1] B. DeMan et S. Basu. *Distance driven projection and backprojection in three dimensions*. Physics in Medicine and Biology, 2004.
- [2] Y. Long, J.A. Fessler et J.M. Balter. *3D Forward and Back-Projection for X-Ray CT Using Separable Footprints with Trapezoid Functions*. 10th Intl. Mtg. on Fully 3D Im. Rec. in Rad. and Nuc. Med., 2009.
- [3] S. Horbelt, M. Liebling, M. Unser. *Discretization of the Radon transform and of its inverse by spline convolutions*. IEEE Transactions on medical imaging, 2002.

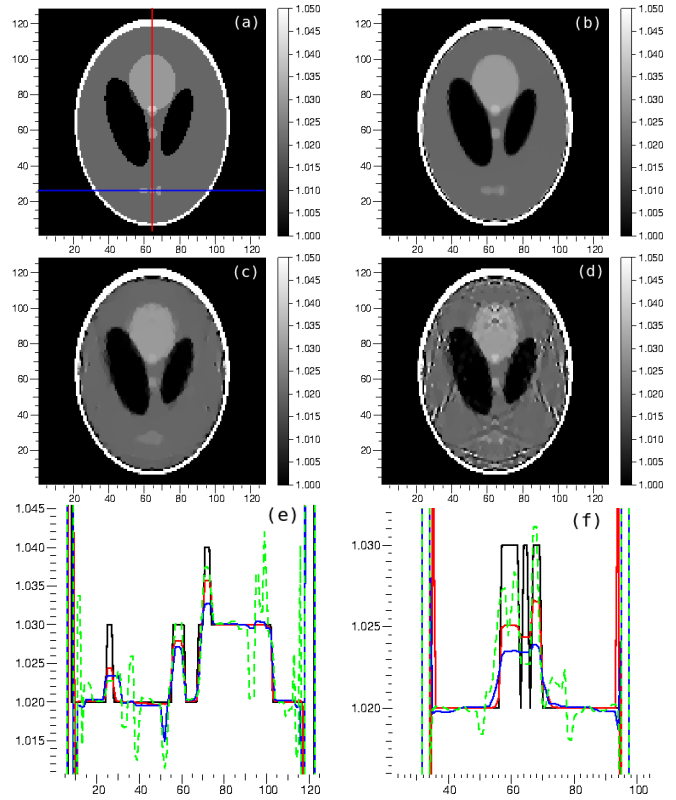


FIGURE 3 – Reconstructions d’un fantôme de Shepp-Logan  $128 \times 128$  (axes en pixels), à partir de sinogrammes calculés analytiquement en géométrie parallèle, pour 200 pixels sur le détecteur et 60 angles de projection espacés régulièrement sur un intervalle de  $180^\circ$  (axes en pixels détecteur + numéro d’angle croissant). (a) : image originale. (b) : meilleur résultat qualitatif avec le projecteur B-spline utilisant des B-splines cubiques. (c) : meilleur résultat qualitatif avec le projecteur *distance driven*. (d) : reconstruction *distance driven* avec une erreur résiduelle par rapport aux sinogrammes initiaux (erreur quadratique moyenne de l’image reprojétée par rapport aux vrais sinogrammes) identique à la reconstruction avec le modèle B-spline (b). (e) : profils des reconstructions (ligne rouge sur l’image (a)); en noir : (a) - en rouge : (b) - en bleu : (c) - en vert : (d). (f) : profils des reconstructions (ligne bleue sur l’image (a)); même légende couleur que le graphe (e).

- [4] P.M. Joseph *An improved algorithm for reprojecting rays through pixel images*. IEEE Transactions on Medical Imaging, 1982.
- [5] M. Slaney et A. Kak *Principles of computerized tomographic imaging* SIAM, Philadelphia, 1988
- [6] R.M. Lewitt *Alternatives to voxels for image representation in iterative reconstruction algorithms*. Physics in Medicine and Biology, 1992.
- [7] L.I. Rudin, S. Osher et E. Fatemi *Nonlinear total variation based noise removal algorithms*. Physica D : Nonlinear Phenomena, 1992.
- [8] P. Thévenaz, T. Blu et M. Unser. *Interpolation Revisited*. IEEE Transactions on Medical Imaging, 2000.