

# GRETSI 2011 - Bordeaux

## Modèle direct pour la tomographie 3D : apport d'une approximation par B-splines séparables

Fabien Momey<sup>1,2</sup>   Jean-Marie Becker<sup>2</sup>   Loïc Denis<sup>1,2</sup>   Laurent Desbat<sup>3</sup>  
Catherine Mennessier<sup>2</sup>   Eric Thiébaud<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Centre de Recherche Astrophysique de Lyon - Observatoire de Lyon

<sup>2</sup>Laboratoire Hubert Curien - Université Jean Monnet Saint-Étienne

<sup>3</sup>TIMC-IMAG

5 Septembre 2011

## Tomographie et reconstruction

La tomographie : reconstruction d'un objet  $\mathbf{f}$  en 3 dimensions ("cube de voxels") à partir d'un ensemble  $\mathbf{g}$  de projections ("type radiographie") acquises sur un plan détecteur, en rotation autour de l'objet.

$$\mathbf{f} \quad ? \quad \longleftrightarrow \quad \mathbf{g} = \{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_\theta, \dots\}$$

### Inversion directe : rétroprojection filtrée

À partir d'un modèle des mesures inversible analytiquement.

- modèle mathématique (intégrales de ligne), sensible aux mesures manquantes.
- prise en compte limitée de l'information a priori sur l'objet et sur la statistique du bruit.

### Approche inverse

Méthode itérative à partir d'un modèle direct  $\mathbf{A}$  non nécessairement inversible.

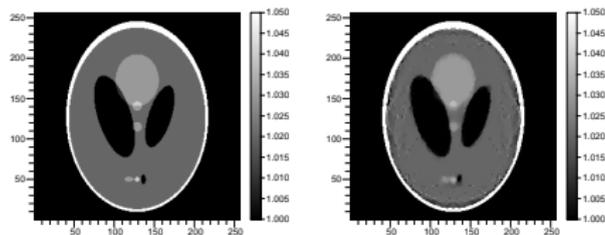
- modèle *plus réaliste*.
- meilleure prise en compte de la *statistique du bruit*.
- apport de l'*information a priori* sur l'objet.

$$\mathbf{f} = \underset{\tilde{\mathbf{f}}}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{g} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{f}}\|_{\mathbf{W}}^2 + \lambda\Psi(\tilde{\mathbf{f}}) \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{f} \geq 0$$

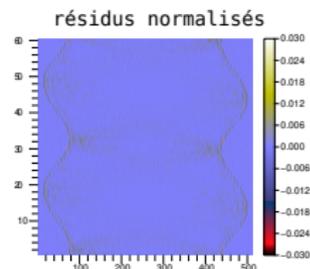
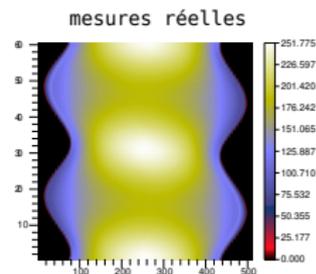
## L'importance du modèle pour la reconstruction

- Modélisation des mesures : point clé dans un processus de **reconstruction itérative**.
- Représentation de l'objet d'intérêt : point de départ à l'élaboration du **projecteur** (modèle direct **A**).

Une modélisation trop approximative peut engendrer des erreurs importantes de reconstruction.



Exemple de reconstruction à faible nombre de mesures, à partir d'un modèle conventionnel utilisant des indicatrices de voxels.



Le modèle n'est pas exact, il ne fait qu'approcher la réalité (→ mesures réelles).

## Le modèle direct

### Modèle direct **A**

$$\mathbf{g} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{f}$$

- Représentation de l'objet d'intérêt :

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^q} c_k b_k(\mathbf{x}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^q} c_k b(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)$$

- Le projecteur **A** modélise la contribution de chaque voxel de l'objet - fonction de base  $b_k(\mathbf{x})$  - sur chaque pixel détecteur pour une projection donnée :

$$\mathbf{g}_j = \mathbf{A}_j \cdot \mathbf{f} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^q} \mathbf{A}_j(b_k) \cdot c_k = \sum_{k \in \mathbb{Z}^q} \mathbf{A}_{jk} \cdot c_k$$

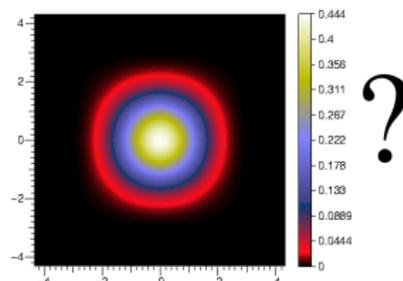
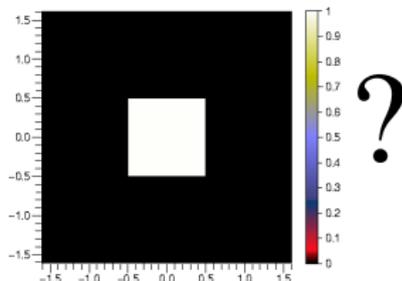
- La valeur des coefficients  $\mathbf{A}_{jk}$  dépend de la **base de fonctions considérée**.

## Les propriétés d'intérêt de la base de représentation

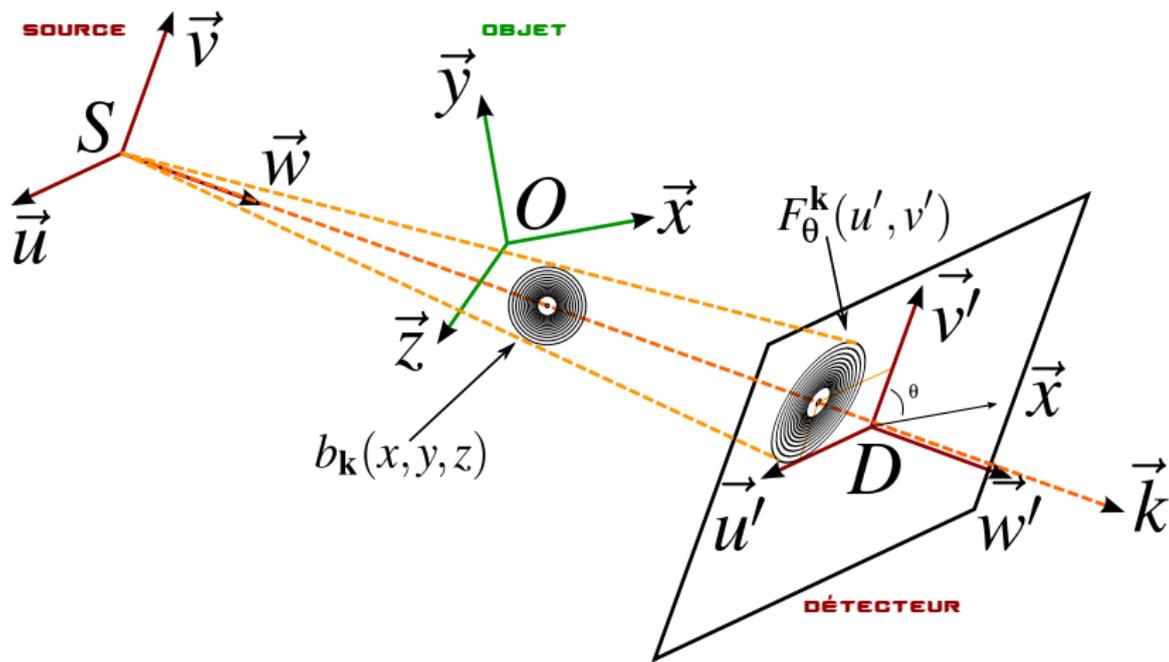
### De quoi a-t-on besoin ?

- Bonne modélisation de la continuité de la fonction + conservation des bords francs + bon comportement face aux artefacts générés par des transformations géométriques.
- Compacité pour un projecteur creux (peu de coefficients non nuls).
- Symétrie sphérique pour une projection indépendante de l'orientation.

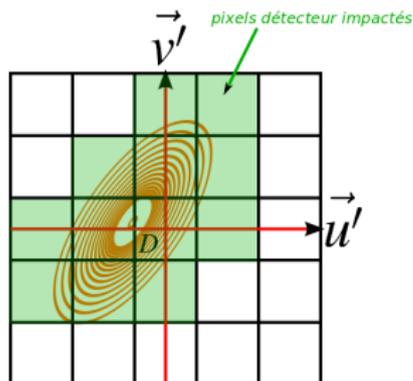
### Quel est le meilleur choix ?



## Le principe de projection (1)



## Le principe de projection (2)



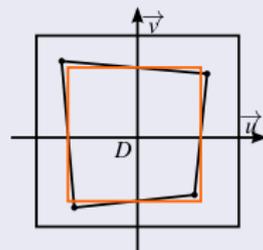
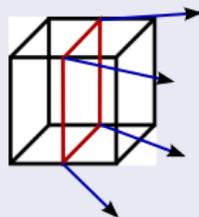
- Déterminer l'empreinte  $F_{\theta}^k$  de la fonction de base  $b_k$  sur le détecteur + intégration par la réponse des pixels détecteur impactés.
- Empreinte différente suivant la position et la géométrie de projection (parallèle ou conique).

⇒ **Approximations nécessaires pour faciliter le calcul numérique de l'empreinte dans le modèle.**

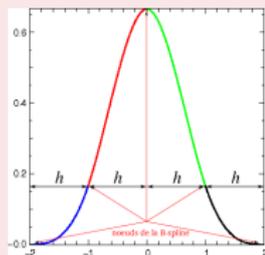
## Proposition d'un modèle amélioré (1)

### Modèle standard Distance Driven

- Utilise des indicatrices de voxels.
- Projection d'une coupe centrale du voxel et approximation par une empreinte rectangulaire sur le détecteur.



### Amélioration : utilisation de B-splines



- Meilleure *modélisation de la continuité*, meilleur comportement face aux transformations géométriques.
- *Compacité conservée.*
- *Quasi-symétrie sphérique*  $\Rightarrow$  projection quasi-isotrope.

$\Rightarrow$  Mise en oeuvre avec des approximations.

## Proposition d'un modèle amélioré (2)

On construit un projecteur à partir de fonctions B-splines multidimensionnelles séparables.

$$b_{\mathbf{k}}(x, y, z) = \beta_h^n(x - x_k) \cdot \beta_h^n(y - y_k) \cdot \beta_h^n(z - z_k) \Rightarrow F_{\theta}^{\mathbf{k}}(u', v') ?$$

### Première approximation

**La B-spline est supposée à symétrie sphérique**  $\Rightarrow$  *empreinte*  $\approx$  B-spline séparable suivant les axes détecteur quelle que soit la direction de projection.

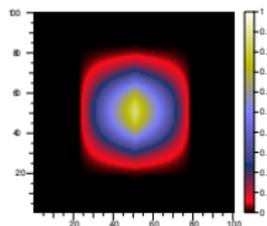
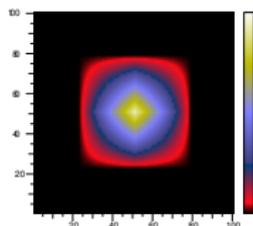
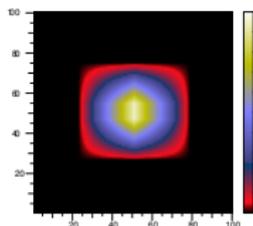
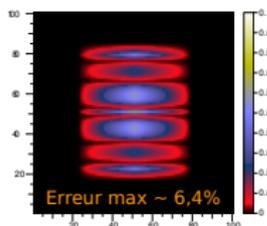
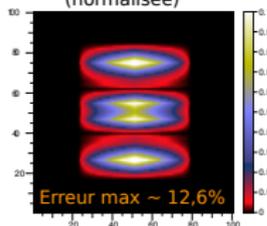
$$F_{\theta}^{\mathbf{k}}(u', v') \approx \beta_h^n(u' - u'_k) \cdot \beta_h^n(v' - v'_k)$$

### Seconde approximation

**projection conique**  $\approx$  **projection localement parallèle** + "dilatation" d'un facteur  $\gamma$ .

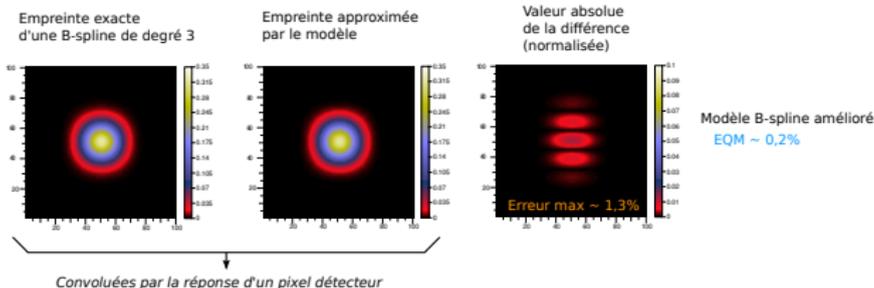
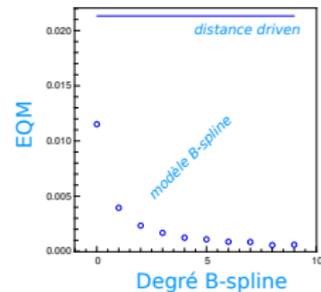
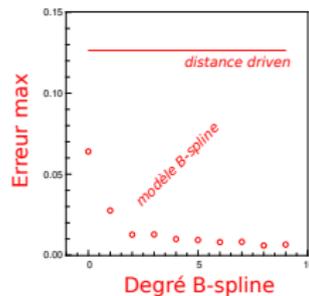
$$F_{\theta}^{\mathbf{k}}(u', v') \approx \beta_h^n\left(\frac{v'}{\Gamma_S \cdot \delta_v} - v'_k\right) \cdot \beta_h^n\left(\frac{u'}{\Gamma_S \cdot \delta_u} - u'_k\right)$$

## B-spline de degré 0 en projection parallèle

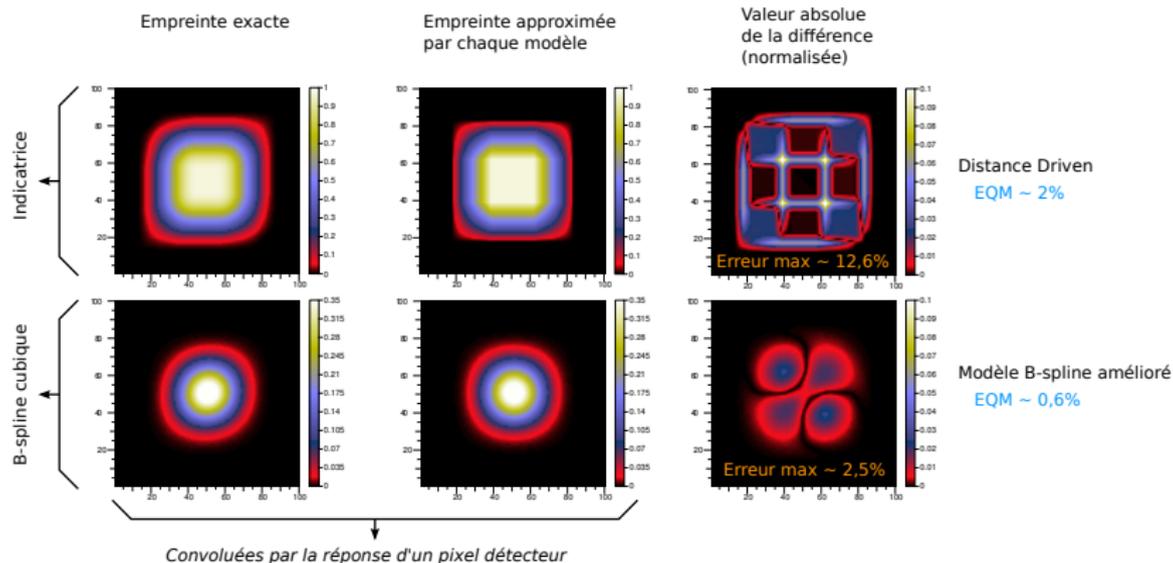
Empreinte exacte d'une  
B-spline de degré 0Empreintes approximées  
par chaque modèleValeur absolue  
de la différence  
(normalisée)Distance Driven  
EQM ~ 2%Modèle B-spline amélioré  
EQM ~ 1%

↓  
Convulées par la réponse d'un pixel détecteur

## B-spline de degré 3 en projection parallèle

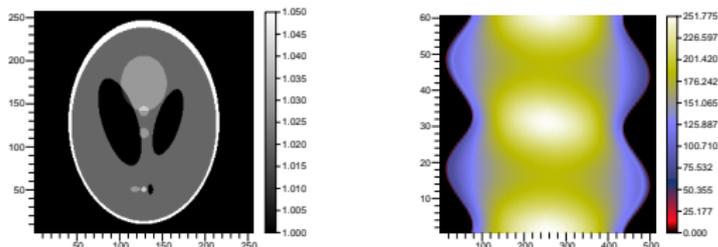
Évolution des erreurs  
en fonction du degré des B-splines

## B-spline de degré 3 en projection conique



## Les reconstructions (1)

- Reconstructions à 2 dimensions, en géométrie *fan beam*, d'une image simulée.



⇒ Les mesures sont calculées analytiquement

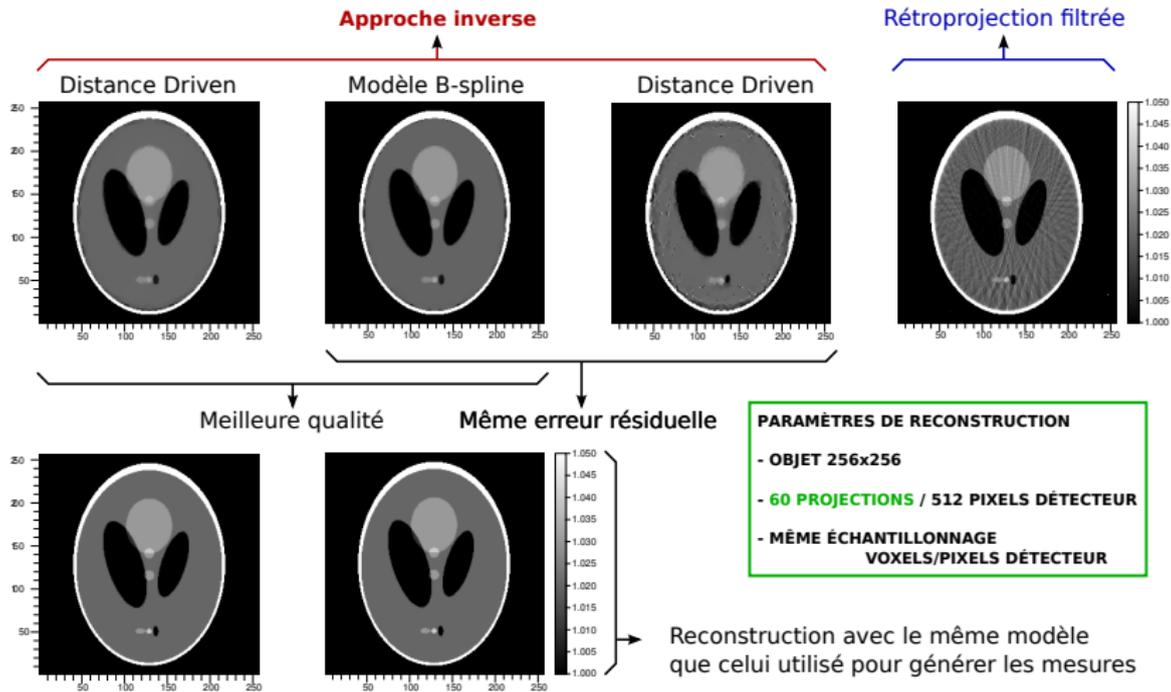
- Rappel du schéma d'optimisation:

$$\mathbf{f} = \underset{\tilde{\mathbf{f}}}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{g} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{f}}\|^2 + \lambda\Psi(\tilde{\mathbf{f}}) \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{f} \geq 0$$

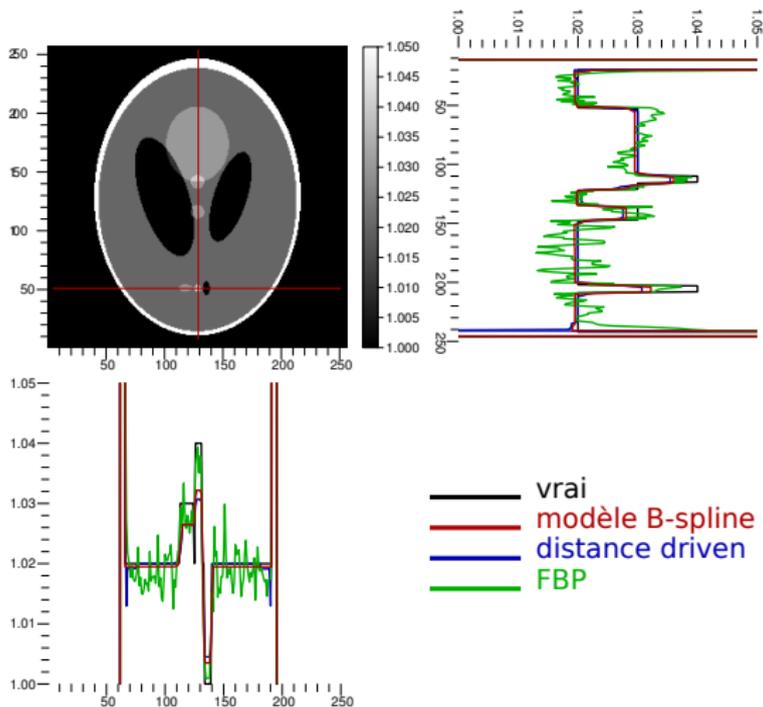
- Reconstructions par une méthode Quasi-Newton régularisée par variation totale lissée :

$$\Psi(\mathbf{f}) = \sum_i \sum_j \sqrt{\left(\frac{\partial \mathbf{f}_{ij}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{f}_{ij}}{\partial y}\right)^2 + \epsilon^2}$$

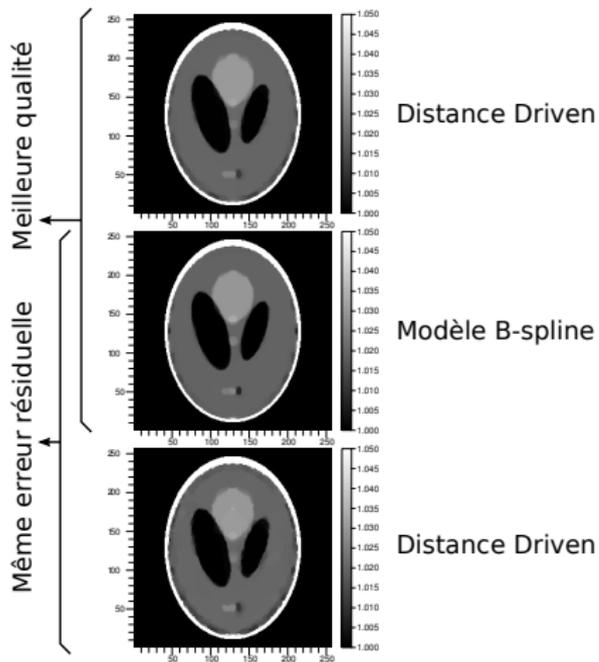
## Les reconstructions (2)



## Les reconstructions (3)

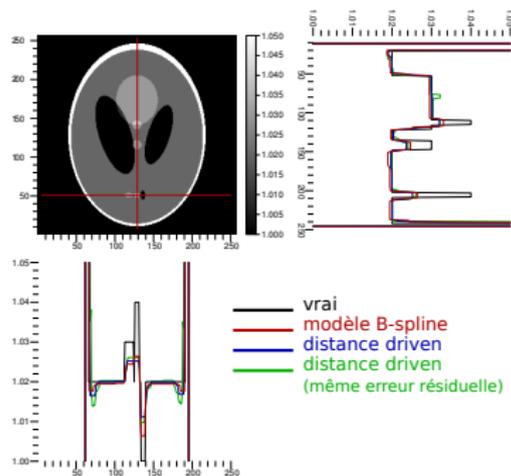


## Les reconstructions (4)



## PARAMÈTRES DE RECONSTRUCTION

- OBJET 256x256
- 30 PROJECTIONS / 512 PIXELS DÉTECTEUR
- MÊME ÉCHANTILLONNAGE VOXELS/PIXELS DÉTECTEUR



## Conclusions et perspectives

### Conclusions

- Développement d'un modèle plus précis que les modèles conventionnels garantissant des reconstructions de bonne qualité, même à faible nombre de mesures.
- Opérateur creux  $\Rightarrow$  pas de surcharge de calcul.
- Modèle testé en reconstruction 2D, mais pensé pour la 3D.

### Études à venir

- Étude à d'autres résolutions et avec des mesures bruitées.
- Mise en oeuvre du modèle et reconstructions en 3D.
- Application en tomographie dynamique: reconstruction d'une image globale 4D avec régularisation spatio-temporelle.