

GRETSI 2011 - Bordeaux

Modèle direct pour la tomographie 3D : apport d'une approximation par B-splines séparables

Fabien Momey^{1,2} Jean-Marie Becker² Loïc Denis^{1,2} Laurent Desbat³
Catherine Mennessier² Eric Thiébaud¹

¹Centre de Recherche Astrophysique de Lyon - Observatoire de Lyon

²Laboratoire Hubert Curien - Université Jean Monnet Saint-Étienne

³TIMC-IMAG

5 Septembre 2011

Tomographie et reconstruction

La tomographie : reconstruction d'un objet \mathbf{f} en 3 dimensions ("cube de voxels") à partir d'un ensemble \mathbf{g} de projections ("type radiographie") acquises sur un plan détecteur, en rotation autour de l'objet.

$$\mathbf{f} \quad ? \quad \longleftrightarrow \quad \mathbf{g} = \{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_\theta, \dots\}$$

Inversion directe : rétroprojection filtrée

À partir d'un modèle des mesures inversible analytiquement.

- modèle mathématique (intégrales de ligne), sensible aux mesures manquantes.
- prise en compte limitée de l'information a priori sur l'objet et sur la statistique du bruit.

Approche inverse

Méthode itérative à partir d'un modèle direct \mathbf{A} non nécessairement inversible.

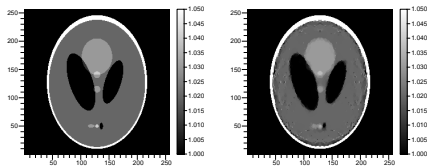
- modèle *plus réaliste*.
- meilleure prise en compte de la *statistique du bruit*.
- apport de l'*information a priori* sur l'objet.

$$\mathbf{f} = \underset{\tilde{\mathbf{f}}}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{g} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{f}}\|_{\mathbf{W}}^2 + \lambda\Psi(\tilde{\mathbf{f}}) \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{f} \geq 0$$

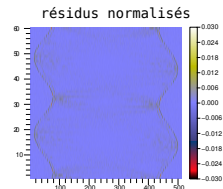
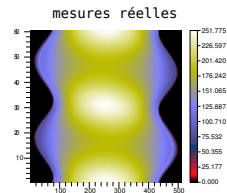
L'importance du modèle pour la reconstruction

- Modélisation des mesures : point clé dans un processus de **reconstruction itérative**.
- Représentation de l'objet d'intérêt : point de départ à l'élaboration du **projecteur** (modèle direct **A**).

Une modélisation trop approximative peut engendrer des erreurs importantes de reconstruction.



Exemple de reconstruction à faible nombre de mesures, à partir d'un modèle conventionnel utilisant des indicatrices de voxels.



Le modèle n'est pas exact, il ne fait qu'approcher la réalité (→ mesures réelles).

Le modèle direct

Modèle direct **A**

$$\mathbf{g} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{f}$$

- Représentation de l'objet d'intérêt :

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^q} c_k b_k(\mathbf{x}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^q} c_k b(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)$$

- Le projecteur **A** modélise la contribution de chaque voxel de l'objet - fonction de base $b_k(\mathbf{x})$ - sur chaque pixel détecteur pour une projection donnée :

$$\mathbf{g}_j = \mathbf{A}_j \cdot \mathbf{f} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^q} \mathbf{A}_j(b_k) \cdot c_k = \sum_{k \in \mathbb{Z}^q} \mathbf{A}_{jk} \cdot c_k$$

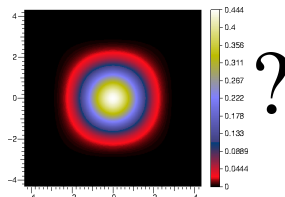
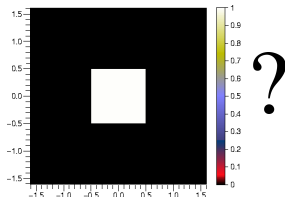
- La valeur des coefficients \mathbf{A}_{jk} dépend de la **base de fonctions considérée**.

Les propriétés d'intérêt de la base de représentation

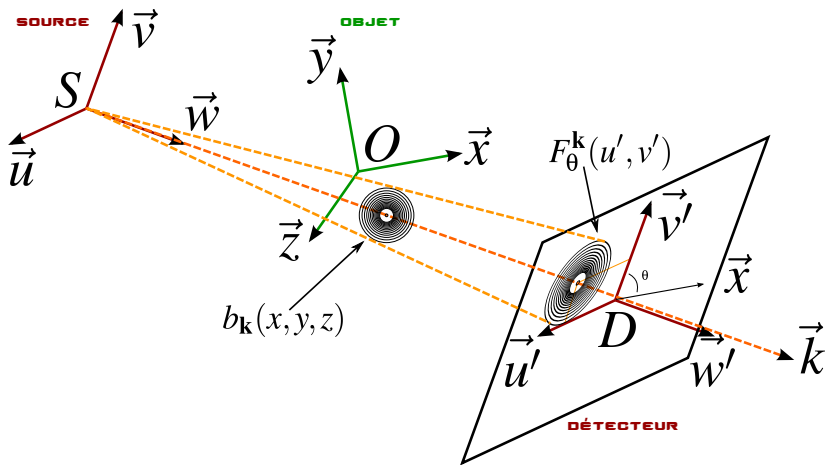
De quoi a-t-on besoin ?

- Bonne modélisation de la continuité de la fonction + conservation des bords francs + bon comportement face aux artefacts générés par des transformations géométriques.
- Compacité pour un projecteur creux (peu de coefficients non nuls).
- Symétrie sphérique pour une projection indépendante de l'orientation.

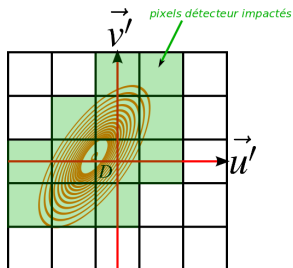
Quel est le meilleur choix ?



Le principe de projection (1)



Le principe de projection (2)



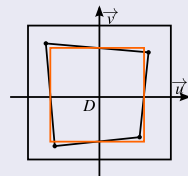
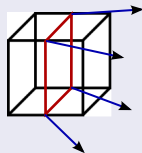
- Déterminer l'empreinte F_{θ}^k de la fonction de base b_k sur le détecteur + intégration par la réponse des pixels détecteur impactés.
- Empreinte différente suivant la position et la géométrie de projection (parallèle ou conique).

⇒ **Approximations nécessaires pour faciliter le calcul numérique de l'empreinte dans le modèle.**

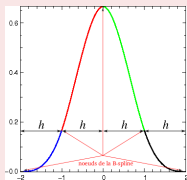
Proposition d'un modèle amélioré (1)

Modèle standard Distance Driven

- Utilise des indicatrices de voxels.
- Projection d'une coupe centrale du voxel et approximation par une empreinte rectangulaire sur le détecteur.



Amélioration : utilisation de B-splines



- Meilleure *modélisation de la continuité*, meilleur comportement face aux transformations géométriques.
- *Compacité conservée.*
- *Quasi-symétrie sphérique* \Rightarrow projection quasi-isotrope.

\Rightarrow Mise en oeuvre avec des approximations.

Proposition d'un modèle amélioré (2)

On construit un projecteur à partir de fonctions B-splines multidimensionnelles séparables.

$$b_{\mathbf{k}}(x, y, z) = \beta_h^n(x - x_k) \cdot \beta_h^n(y - y_k) \cdot \beta_h^n(z - z_k) \Rightarrow F_{\theta}^{\mathbf{k}}(u', v') \quad ?$$

Première approximation

La B-spline est supposée à symétrie sphérique \Rightarrow *empreinte* \approx B-spline séparable suivant les axes détecteur quelle que soit la direction de projection.

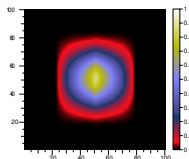
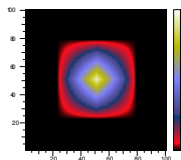
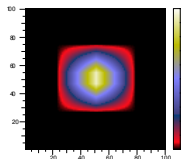
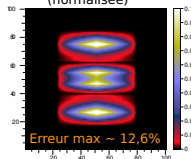
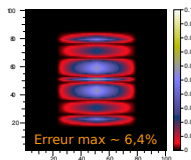
$$F_{\theta}^{\mathbf{k}}(u', v') \approx \beta_h^n(u' - u'_k) \cdot \beta_h^n(v' - v'_k)$$

Seconde approximation

projection conique \approx projection localement parallèle + "dilatation" d'un facteur γ .

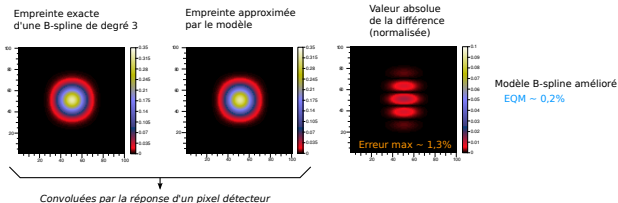
$$F_{\theta}^{\mathbf{k}}(u', v') \approx \beta_h^n\left(\frac{v'}{\Gamma_S \cdot \delta_v} - v'_k\right) \cdot \beta_h^n\left(\frac{u'}{\Gamma_S \cdot \delta_u} - u'_k\right)$$

B-spline de degré 0 en projection parallèle

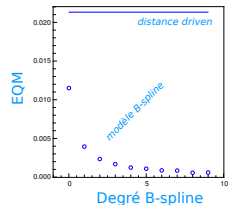
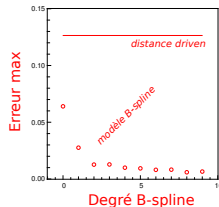
Empreinte exacte d'une
B-spline de degré 0Empreintes approximées
par chaque modèleValeur absolue
de la différence
(normalisée)Distance Driven
EQM ~ 2%Modèle B-spline amélioré
EQM ~ 1%

↓
Convulées par la réponse d'un pixel détecteur

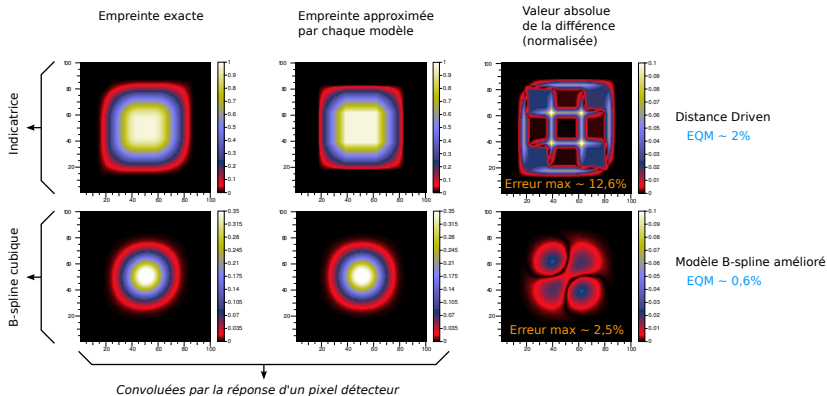
B-spline de degré 3 en projection parallèle



Évolution des erreurs
en fonction du degré des B-splines

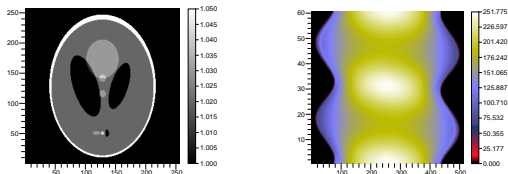


B-spline de degré 3 en projection conique



Les reconstructions (1)

- Reconstructions à 2 dimensions, en géométrie *fan beam*, d'une image simulée.



⇒ Les mesures sont calculées analytiquement

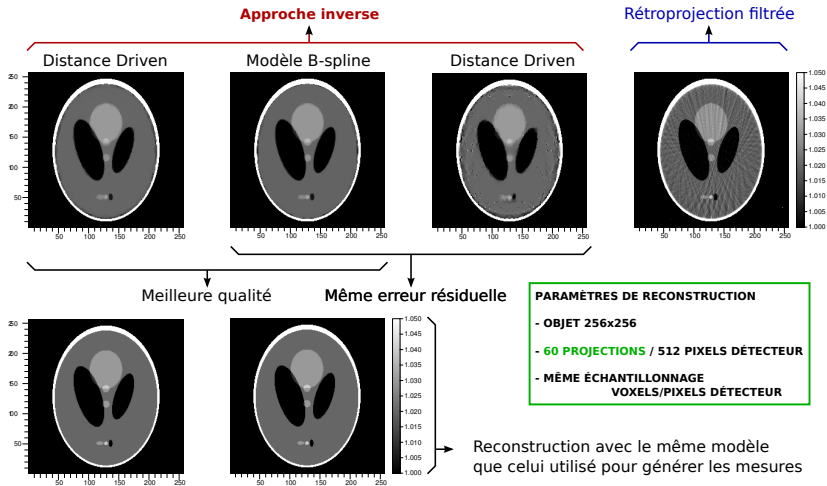
- Rappel du schéma d'optimisation:

$$\mathbf{f} = \underset{\tilde{\mathbf{f}}}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{g} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{f}}\|^2 + \lambda\Psi(\tilde{\mathbf{f}}) \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{f} \geq 0$$

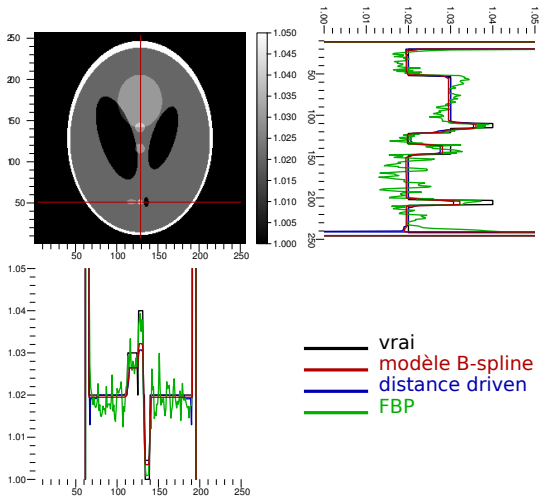
- Reconstructions par une méthode Quasi-Newton régularisée par variation totale lissée :

$$\Psi(\mathbf{f}) = \sum_i \sum_j \sqrt{\left(\frac{\partial \mathbf{f}_{ij}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{f}_{ij}}{\partial y}\right)^2 + \epsilon^2}$$

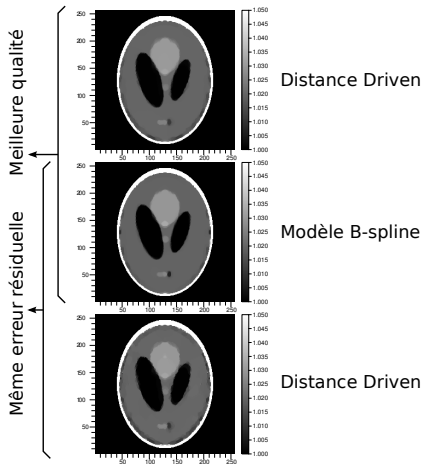
Les reconstructions (2)



Les reconstructions (3)

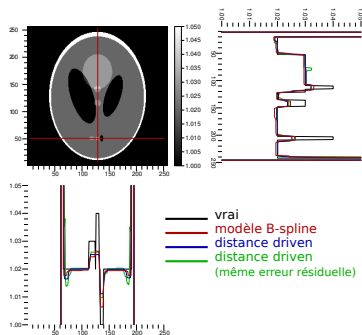


Les reconstructions (4)



PARAMÈRES DE RECONSTRUCTION

- OBJET 256x256
- 30 PROJECTIONS / 512 PIXELS DÉTECTEUR
- MÊME ÉCHANTILLONNAGE VOXELS/PIXELS DÉTECTEUR



Conclusions et perspectives

Conclusions

- Développement d'un modèle plus précis que les modèles conventionnels garantissant des reconstructions de bonne qualité, même à faible nombre de mesures.
- Opérateur creux \Rightarrow pas de surcharge de calcul.
- Modèle testé en reconstruction 2D, mais pensé pour la 3D.

Études à venir

- Étude à d'autres résolutions et avec des mesures bruitées.
- Mise en oeuvre du modèle et reconstructions en 3D.
- Application en tomographie dynamique: reconstruction d'une image globale 4D avec régularisation spatio-temporelle.